

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ – ΘΕΜΑ Α

1° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Μονάδες 3

A2. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον y' .

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

δ) Αν η f είναι αντιστρέψιμη συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

ε) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Μονάδες 10

2° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. i) Έστω το πολυώνυμο

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

ii) Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x), Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$, με $Q(x_0) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Μονάδες 4 + 1

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται 1 – 1;

Μονάδες 4

A4. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο;

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$ τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

β) Κάθε συνάρτηση, που είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της, είναι γνησίως μονότονη.

γ) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, αν και μόνον αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 = x_2$, τότε $f(x_1) = f(x_2)$.

δ) Αν f, g είναι δύο οποιοσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 10

3° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A3. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 3

A4. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Bolzano

Μονάδες 3+2

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0.$$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ με $x \in \mathbb{R}$ έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου.

γ) Αν μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:
 $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$.

δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

ε) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.

Μονάδες 10

4^ο Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής.

Μονάδες 3

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

Μονάδες 3

A3. (i) Πότε μια συνάρτηση συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη;

(ii) Εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ;

Μονάδες 3+6

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι πάντα διάστημα.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (A, B) , όπου $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$ και $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$

δ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

Μονάδες 10

5° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$.

Μονάδες 7

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ;

Μονάδες 5

A3. Πότε μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \right)$$

γ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g που υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ και $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

δ) Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1 τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

ε) Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1 \neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Μονάδες 10

6° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία του θεωρήματος.

Μονάδες 4

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- 2) Αν $f(x) = \ln |x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε ισχύει $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$
- 3) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:
$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)$$
- 4) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0
- 5) Για κάθε συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$

Μονάδες 10

7^ο Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

A2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ δηλαδή, } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Μονάδες 6

A3. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0

2) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sin x = 0\}$ ισχύει $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

4) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$

5) $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$ για κάθε $x < 0$.

Μονάδες 10

8° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 4

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- Η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$$

- 2) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, είναι σταθερή στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$

- 3) Αν $f(x) = \ln |x|$ για κάθε $x \neq 0$, τότε ισχύει $f'(x) = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \neq 0$

- 4) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$$

- 5) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0

Μονάδες 10

9^ο Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

A2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Τι ονομάζεται παράγωγος της f στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0 , τότε η f' είναι συνεχής στο x_0
- 2) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$
- 3) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$ τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$
- 4) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίο ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- 5) $(\sin x)' = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

10° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

A2. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .
- 2) Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$
- 3) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[a, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [a, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$
- 4) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f
- 5) Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το x_0 είναι τοπικό ελάχιστο της f

Μονάδες 10

11° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Να διατυπώσετε το θεώρημα Fermat.

Μονάδες 4

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .
- 2) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$
- 3) Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ
- 4) Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «κάτω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής.
- 5) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.

Μονάδες 10

12° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 4

A2. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $n \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη
- 2) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατά ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- 3) Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- 4) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .
- 5) Κάθε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$, είναι σταθερή στο (a, x_0)

Μονάδες 10

13° Διαγώνισμα Θεωρίας

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής: $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή:

$$G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x)dx \geq 0$
- 2) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

- 3) Αν f, g, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^\beta f(x)g'(x)dx = \int_a^\beta f(x)dx \cdot \int_a^\beta g(x)dx$$

- 4) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε: $\int_a^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(a)$
- 5) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει $\int_a^\beta f(x)dx = - \int_\beta^a f(x)dx$

Μονάδες 10