Μαθηματικό Ζέσταμα – Απαντήσεις

Συναρτήσεις

Ημερομηνία ………………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο ……………………………………………………………………………………….

Άσκηση 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2 \; με \; x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1–1.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ.i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία y = x.

ii. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} και την ευθεία $y = x$.

Λύση

α. Εύκολα δείχνω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$ τότε είναι και συνάρτηση $1 - 1$

$$f(x) = 2 + (x - 2)^2, x \geq 2$$

$$f'(x) = 2(x - 2)$$

β. Θέτω $y = f(x) \Leftrightarrow y = 2 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow y - 2 = (x - 2)^2,\; y \geq 2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y - 2} = x - 2 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{y - 2}$$

$$f^{-1}(y) = 2 + \sqrt{y - 2}, y \geq 2$$

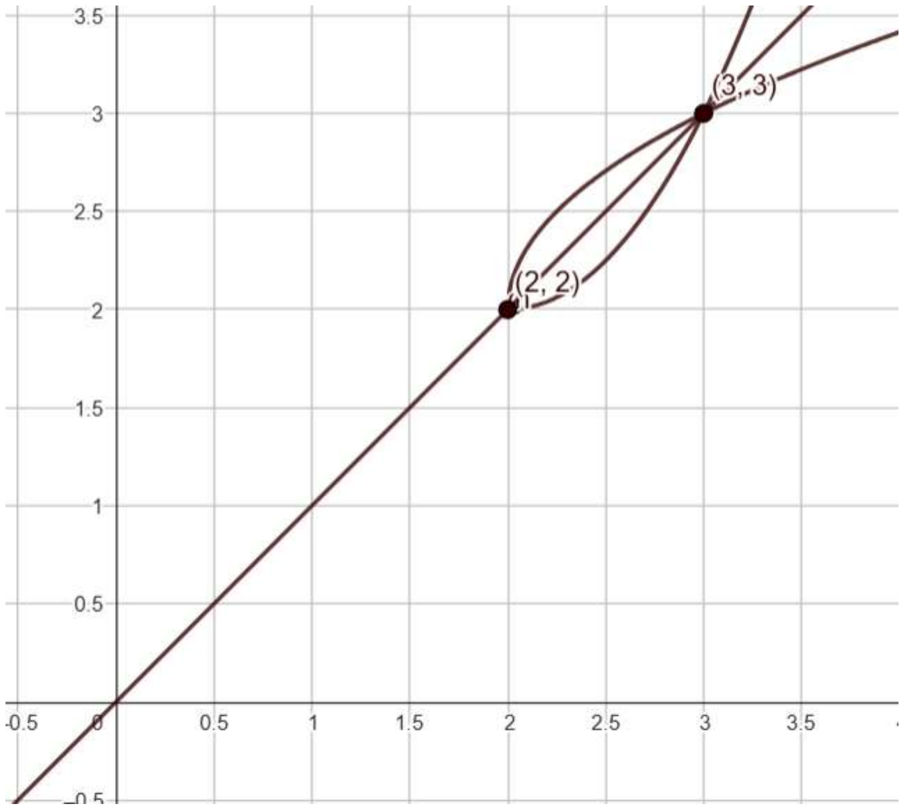
Αλλάζω το y σε x οπότε

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 2}, \qquad D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

γ.i. Λύνω $x = 2 + (x - 2)^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 3) = 0$

Οπότε $(x - 2 = 0 \text{ ή } x - 3 = 0) \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 3$. Άρα τα κοινά σημεία τους είναι τα $A(2,2), B(3,3)$

ii.


(3, 3)
(2, 2)
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

Ημερομηνία ……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο ……………………………………………………………………………………….

Άσκηση 2

*Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

1) Αν η f έχει αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και η γραφική παράσταση της f έχει ένα κοινό σημείο Α με τη ευθεία $y = x$, τότε το σημείο Α ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. ***Σωστό***

2) Αν η συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ισχύει $f^{-1}\big(f(x)\big) = x\,, x \in A$. ***Σωστό***

3) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$, για κάθε $x \in A$. ***Λάθος***

4) Αν μια συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}\big(f(x)\big) = x\,, x \in A$ και $f\big(f^{-1}(y)\big) = y\,, y \in f(A)$. ***Σωστό***

5) Οι γραφικές παραστάσεις των C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. ***Σωστό***

6) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}. ***Σωστό***

Άσκηση 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = lnx$ και $h(x) = 1 + e^x$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = ln(1 + e^x)$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

γ) $f(x^2 - 3x) = f(4x - 12)$

Λύση

$\boldsymbol{\alpha}$) $D_{g \circ h} = \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ 1 + e^x > 0 \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$f(x) = g\big(h(x)\big) = g(1 + e^x) = ln(1 + e^x)$

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \ell n(1 + e^{x_1}) = \ell n(1 + e^{x_2})$

$\Rightarrow 1 + e^{x_1} = 1 + e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1 – 1, οπότε η f αντιστρέφεται.

$f(x) = y \Leftrightarrow \ell n(1 + e^x) = y \;\Leftrightarrow 1 + e^x = e^y \Leftrightarrow e^x = e^y - 1$

$\underset{y>0}{\overset{e^y - 1 > 0}{\Leftrightarrow}} x = \ell n(e^y - 1), \quad y > 0$

Συνεπώς, $f^{-1}(x) = \ell n(e^x - 1), \quad x > 0$

γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$f(x^2 - 3x) = f(4x - 12) \overset{f\ 1-1}{\Longleftrightarrow} x^2 - 3x = 4x - 12 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 4$

Ημερομηνία ……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο …………………………………………………………………………………….

Άσκηση 4

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(lnx)=lnx+2-\frac{4x}{x+1},\qquad \text{για κάθε } x>0$$

α) Να αποδείξετε ότι έχει τύπο

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}$$

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=x-1$

Λύση

α) Ισχύει:

$$\begin{cases} f(lnx)=lnx+2-\dfrac{4x}{x+1} \\ x>0 \end{cases}$$

Θέτω $y=lnx \Leftrightarrow e^y=x$ τότε

$$\begin{cases} f(y)=y+2-\dfrac{4e^y}{e^y+1} \\ e^y>0 \end{cases}$$

Αλλάζω τη μεταβλητή y σε x και τελικά

$$f(x)=x+2-\frac{4e^x}{e^x+1}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Επειδή η συνάρτηση f γνησίως αύξουσα τότε είναι και 1-1 άρα αντιστρέφεται. Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f.

$$D_{f^{-1}}=f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$$

γ) Για την εξίσωση $f^{-1}(x)=x-1$ έχουμε

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = x - 1 \\ x \in f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x = f(x-1) \Leftrightarrow x = x - 1 + 2 - \frac{4e^{x-1}}{e^{x-1}+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{4e^{x-1}}{e^{x-1}+1} \Leftrightarrow e^{x-1} + 1 = 4e^{x-1} \Leftrightarrow 3e^{x-1} = 1 \Leftrightarrow e^{x-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \ln\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = 1 - ln3$$

Ημερομηνία ……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο ………………………………………………………………………………………….

Άσκηση 5

Να υπολογίσετε τις παραγώγους:

$$\boldsymbol{\alpha})\ \boldsymbol{f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}},\quad \boldsymbol{x\in\mathbb{R}},\quad \boldsymbol{\beta})\ \boldsymbol{f(x)=\frac{xlnx}{x-1}},\quad \boldsymbol{x\in(0,1)\cup(1,+\infty)}$$

$$\boldsymbol{\gamma})\ \boldsymbol{f(x)=(3x^2+5)^9},\quad \boldsymbol{\delta})\ \boldsymbol{g(x)=e^{-x^2+1}},\quad \boldsymbol{\varepsilon})\ \boldsymbol{h(x)=ln\sqrt{x^2+1}}$$

Τι συμπέρασμα βγάζετε για τη συνάρτηση (α);

Λύση

$$\boldsymbol{\alpha})\ f'(x)=\frac{(x^3)'\cdot(x^2+1)-x^3\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

$$\boldsymbol{\beta})\ f'(x)=\left(\frac{x\ln x}{x-1}\right)'=\frac{(x\ln x)'(x-1)-x\ln x\,(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{(\ln x+1)(x-1)-x\ln x}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x\ln x-\ln x+x-1-x\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2},\qquad x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$$

$$\boldsymbol{\gamma})\ f'(x)=((3x^2+5)^9)'=9(3x^2+5)^8\cdot(3x^2+5)'=$$

$$=9(3x^2+5)^8\cdot 6x=54x(3x^2+5)^8$$

$$\boldsymbol{\delta})\ g'(x)=(e^{-x^2+1})'=e^{-x^2+1}(-x^2+1)'=e^{-x^2+1}(-2x)=-2xe^{-x^2+1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon})\ h'(x)=(ln(\sqrt{x^2+1}))'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot(\sqrt{x^2+1})'=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=\frac{1}{2(x^2+1)}\cdot 2x$$

$$=\frac{x}{x^2+1}$$

Ημερομηνία ……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο …………………………………………………………………………………….

Άσκηση 6

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$ ισχύει $f(x)=\frac{x^2-7x+12}{x-4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1

Λύση

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε θα είναι συνεχής και στο σημείο 4 δηλαδή

$$f(4)=\lim_{x\to 4} f(x)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-7x+12}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-3)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x-3)=1$$

Άσκηση 7

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ \alpha, & x=2\end{cases}$$

Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=2$

Λύση

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση f στο σημείο $x_0=2$, πρέπει $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}\lim_{x\to 2} x+2=4, \qquad και\; f(2)=\alpha$$

Οπότε $f(2)=\lim\limits_{x\to 2} f(x) \Leftrightarrow \alpha=4$

Ημερομηνία ……………………………………………………………………………………………….

Ονοματεπώνυμο ……………………………………………………………………………………….

Άσκηση 8

Να υπολογίσετε, εάν υπάρχει, την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 0$, με

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x + \eta\mu x, x \geq 0 \\ x^2 + 2\eta\mu x, x < 0 \end{cases}}$$

Λύση

$Είναι, \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x + \eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} = 2\ \kappa\alpha\iota$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + 2\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2}{x} + 2\frac{\eta\mu x}{x} = \lim_{x\to 0^-} x + 2\frac{\eta\mu x}{x} = 2$

επειδή $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 2 \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 2$

Άσκηση 9

Να εξετάσετε εάν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, με

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} lnx + x - 1, x > 0 \\ x^2 + 1, x \leq 0 \end{cases}}$$

Λύση

Αφού $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(lnx + x - 1) = -\infty$ η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.