ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ **Β – Γ** ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΝΤΑΝΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Τελευταία Ανανέωση: 13/07/2025

**ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ**

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Αριθμητικές Παραστάσεις

## Οδηγίες και Μεθοδολογία Λύσης Αριθμητικών Παραστάσεων

- Αναγνώριση των αριθμητικών πράξεων

Πριν ξεκινήσεις υπολογισμούς, καλό είναι *να έχεις πλήρη εικόνα της παράστασης, οπότε* εντόπισε:

- Δυνάμεις
- Αρνητικούς αριθμούς
- Κλάσματα
- Παρενθέσεις
- Πράξεις πρόσθεσης/αφαίρεσης

Εφάρμοσε πάντα τη σωστή σειρά (κανόνας προτεραιότητας):

1. Παρενθέσεις (*πρόσεξε την αλλαγή πρόσημου)*
2. Δυνάμεις
3. Πολλαπλασιασμοί / Διαιρέσεις
4. Προσθέσεις / Αφαιρέσεις

## Υπολόγισε κάθε μέρος βήμα-βήμα

Για κάθε παράσταση:

- Υπολόγισε πρώτα **τις δυνάμεις**. Π.χ.

$$(-5)^2 = 25$$

- , αλλά

$$-5^2 = -25$$

, οπότε

$$-(-5)^2 = -25$$

- Υπολόγισε μετά **τις πράξεις εντός παρενθέσεων**
- Αν υπάρχουν **αρνητικοί αριθμοί**, κράτα προσεκτικά τα πρόσημα
- Αν η παράσταση είναι **υψωμένη σε δύναμη**

Αν έχεις κάτι όπως:

$$\left(\frac{-16}{16}\right)^{2026} = (-1)^{2026} = 1$$

τότε:

- Αν η βάση είναι **αρνητική** και ο εκθέτης **περιττός**, το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό**
- Αν η βάση είναι **αρνητική** και ο εκθέτης **άρτιος**, το αποτέλεσμα είναι **θετικό**

**Σύγκριση αριθμών** (*η μέθοδος της διαφοράς (Α − Β), γιατί δίνει σαφές συμπέρασμα.*)

Αφού υπολογίσεις Α και Β:

- Μπορείς να κάνεις **Α − Β**
- Αν το αποτέλεσμα είναι **αρνητικό**, τότε **Α < Β**
- Αν είναι **θετικό**, τότε **Α > Β**
- Αν είναι **0**, τότε **Α = Β**

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2024-25)

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = -\left(\frac{(-10)^2 - (-8)^2}{-(-6)^2}\right)^{2024} + \frac{10}{11}$$

και

$$B = -[(3 - 8)^2 + (-3)^3 + 1]^{2000} + \frac{30}{31}$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

**Ενδεικτική Λύση**

Βήμα 1: Υπολογισμός του Α

Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις:

$$(-10)^2 = 100 \; και \; (-8)^2 = 64 \; και \; (-6)^2 = 36$$

Άρα:

$$A = -\left(\frac{100 - 64}{-36}\right)^{2024} + \frac{10}{11} = -\left(\frac{36}{-36}\right)^{2024} + \frac{10}{11} = -(-1)^{2024} + \frac{10}{11}$$

Επειδή, η βάση είναι **αρνητική** και ο εκθέτης **άρτιος**, το αποτέλεσμα είναι **θετικό,** δηλαδή $(-1)^{2024} = 1$

$$= -1 + \frac{10}{11} = -\frac{11}{11} + \frac{10}{11} = -\frac{1}{11}$$

Βήμα 2: Υπολογισμός του Β

Υπολογίζουμε τις πράξεις μέσα στην αγκύλη:

$$(3 - 8)^2 + (-3)^3 + 1 = (-5)^2 + (-3)^3 + 1 = 25 - 27 + 1 = -1$$

Άρα:

$$B = -(-1)^{2000} + \frac{30}{31} = -1 + \frac{30}{31} = -\frac{31}{31} + \frac{30}{31} = -\frac{1}{31}$$

Βήμα 3: Σύγκριση των Α και Β

Θεωρούμε τη διαφορά $A - B$ και φέρνουμε τα δύο κλάσματα σε κοινό παρονομαστή:

$$A - B = -\frac{1}{11} - \left(-\frac{1}{31}\right) = -\frac{1}{11} + \frac{1}{31} = \frac{-31}{11 \cdot 31} + \frac{11}{11 \cdot 31} = -\frac{20}{11 \cdot 31} < 0$$

Άρα ισχύει ότι, Α < Β

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2023-24)

Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

$$A = \left(\frac{-(-5)^2 + (-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023} + \frac{22}{23}$$

και

$$B = -[(3 - 7)^2 + (-2)^3 - 9]^2 + \frac{23}{24}$$

**Ενδεικτική Λύση**

Υπολογίζουμε τις δύο αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{-(-5)^2 + (-3)^2}{(-4)^2}\right)^{2023} + \frac{22}{23}$$

Υπολογίζουμε τα τετράγωνα των αριθμών

$$(-5)^2 = 25, \qquad \textit{οπότε} - (-5)^2 = -25$$

$$(-3)^2 = 9, \qquad \textit{και}\ (-4)^2 = 16$$

και αντικαθιστώ,

$$= \left(\frac{-25 + 9}{16}\right)^{2023} + \frac{22}{23}$$

$$= (-1)^{2023} + \frac{22}{23} =$$

Όταν υψώνουμε το $-1$ σε **περιττή δύναμη**, το αποτέλεσμα είναι **-1**.

$$= -1 + \frac{22}{23} = -\frac{1}{23}$$

Ύστερα υπολογίζω την παράσταση Β

$$B = -[(3-7)^2 + (-2)^3 - 9]^2 + \frac{23}{24}$$

πρώτα υπολογίζω τις πράξεις μέσα στην αγκύλη

$$(3-7)^2 = (-4)^2 = 16, \qquad \text{και } (-2)^3 = -8$$

Οπότε,

$$\begin{aligned} &= -[(-4)^2 + (-8) - 9]^2 + \frac{23}{24} \\ &= -(16 - 8 - 9)^2 + \frac{23}{24} \\ &= -(-1)^2 + \frac{23}{24} = \end{aligned}$$

Όταν υψώνουμε το $-1$ σε **άρτια δύναμη**, το αποτέλεσμα είναι **1**, οπότε

$$(-1)^2 = 1, \qquad άρα\ -(-1)^2 = -1$$

Οπότε,

$$= -1 + \frac{23}{24} = -\frac{1}{24}$$

Τέλος

$$\begin{aligned} A - B &= -\frac{1}{23} - \left(-\frac{1}{24}\right) = -\frac{1}{23} + \frac{1}{24} \\ &= -\left(\frac{1}{23} - \frac{1}{24}\right) = -\frac{1}{23 \cdot 24} < 0 \end{aligned}$$

Άρα:
A < B

**Άσκηση** (Θαλής **Γ** Γυμνασίου 2024-25)

Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\left(\frac{-99}{9}\right)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2}\right) \cdot (-2024)^0 - 118 - \frac{2}{21}$$

$$B = \frac{(-20)^8}{4^8} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-8} - \frac{3}{32}$$

και να συγκρίνετε τους αριθμούς Α και Β.

**Ενδεικτική Λύση**

$$A = \left(\left(\frac{-99}{9}\right)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2}\right) \cdot (-2024)^0 - 118 - \frac{2}{21} =$$

$$= \left((-11)^2 + \frac{(-3)^5}{9^2}\right) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} =$$

$$= \left((-11)^2 - \frac{3^5}{9^2}\right) \cdot 1 - 118 - \frac{2}{21} =$$

$$= 121 - 3 - 118 - \frac{2}{21} = -\frac{2}{21}$$

$$B = \frac{(-20)^8}{4^8} - \left(-\frac{1}{5}\right)^{-8} - \frac{3}{32}$$

$$= \left(\frac{-20}{4}\right)^8 - (-5)^8 - \frac{3}{32} = (-5)^8 - 5^8 - \frac{3}{32} = -\frac{3}{32}$$

Θεωρούμε τη διαφορά,

$$A - B = -\frac{2}{21} - \left(-\frac{3}{32}\right) = \frac{3}{32} - \frac{2}{21}$$

$$= \frac{63}{672} - \frac{64}{672} = -\frac{1}{672} < 0 \Rightarrow A < B$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΕΚΠ – ΜΚΔ

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2024-25)

Έστω θετικός ακέραιος α τέτοιος, ώστε το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 24 και α να είναι ίσο με 120. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24 και α.

**Ενδεικτική Λύση**

Τα πολλαπλάσιου του αριθμού 24 μέχρι το 120 είναι:

$$1 \cdot 24, \qquad 2 \cdot 24, \qquad 3 \cdot 24, \qquad 4 \cdot 24, \qquad 5 \cdot 24 = 120$$

Οπότε η ελάχιστη τιμή του μπορεί να πάρει ο αριθμός α είναι το 5

$$5 \cdot 24 = 120$$

Άλλες πιθανοί συνδυασμοί είναι

$$5 \cdot (2 \cdot 12) = 120, \delta\eta\lambda\alpha\delta ή\ \ 10 \cdot 12 = 120$$

άρα ο αριθμός α μπορεί να είναι ο 10 ή με την ίδια λογική

$$5 \cdot (3 \cdot 8) = 120, \delta\eta\lambda\alpha\delta ή\ \ 15 \cdot 8 = 120$$

άρα ο αριθμός α μπορεί να είναι ο 15, συνεχίζοντας έτσι καταλήγουμε στους εξής συνδυασμούς,

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2023-24)

Δίνεται ότι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και $x$ είναι ίσος με 3, όπου $x$ θετικός ακέραιος μικρότερος του 50. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και $x$.

**Ενδεικτική Λύση**

Επειδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και $x$ είναι το 3, έπεται ότι πρέπει ο $x$ να είναι πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή οι πιθανές τιμές του $x$,0<$x$<50

Όμως, όταν ο $x$ είναι πολλαπλάσιο του 6 ή πολλαπλάσιο του 9, τότε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 18 και $xx$ θα είναι μεγαλύτερος του 3, οπότε πρέπει να αποκλείσουμε όλα τα πολλαπλάσια αυτών των δύο αριθμών.

Άρα οι δυνατές τιμές του $x$ είναι οι: 3,15,21,33,39, για τις οποίες εύκολα επαληθεύουμε ότι ΜΚΔ( 18, $x$ ) = 3. Επομένως οι δυνατές τιμές του ελαχίστου κοινού πολλαπλασίου των αριθμών 18 και $x$ είναι ΕΚΠ(18,3) = 18, ΕΚΠ(18,15) = 90, ΕΚΠ(18,21) = 126, ΕΚΠ(18,33) = 198, και ΕΚΠ(18,39) = 234.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ Προβλήματα

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2023-24)

Η δασκάλα μιας τάξης 20 παιδιών θέλει να επιλέξει τυχαία κάποια από αυτά για να την εκπροσωπήσουν στη Βουλή. Τοποθετεί τα παιδιά σε έναν κύκλο και τους μοιράζει από ένα φάκελο που μέσα γράφει έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως το 20. Κάθε αριθμός εμφανίζεται μόνο μία φορά. Αφού ανοίξουν τους φακέλους, ένα παιδί επιλέγεται μόνο αν έχει δίπλα του (δεξιά και αριστερά του) ένα παιδί με μικρότερο αριθμό και ένα παιδί με μεγαλύτερο αριθμό. Τελικά επιλέχθηκαν 7 παιδιά. Είναι δυνατόν το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113;

**Ενδεικτική Λύση**

Παρατηρούμε ότι το παιδί που έχει το φάκελο με τον αριθμό 20 δεν μπορεί να επιλεγεί, αφού εκατέρωθεν αυτού στον κύκλο έχει παιδιά με μικρότερους αριθμούς. Συνεπώς το μέγιστο το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν είναι το πολύ $19 + 18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 13 = 112$. Επομένως δεν υπάρχει καμιά διάταξη των παιδιών ώστε το άθροισμα των αριθμών που είχαν τα 7 παιδιά που επιλέχθηκαν να είναι 113.

**Ένα παιδί επιλέγεται μόνο αν δίπλα του έχει έναν αριθμό μικρότερο και έναν μεγαλύτερο.**

Άρα:

- Το **μεγαλύτερο παιδί**, δηλαδή αυτό με τον αριθμό **20**, έχει δίπλα του μόνο **μικρότερους αριθμούς** (όλοι οι άλλοι είναι μικρότεροι). Άρα **δεν μπορεί να επιλεγεί**.
- Αντίστοιχα, το παιδί με τον **αριθμό 1** έχει δίπλα του μόνο **μεγαλύτερους αριθμούς**. Άρα **ούτε κι αυτό μπορεί να επιλεγεί**.
- Αφού **το 20 αποκλείεται**, το μεγαλύτερο νούμερο που μπορεί να έχει ένα παιδί που επιλέγεται είναι **19**.
- Ας πάρουμε τους **7 μεγαλύτερους αριθμούς**, εκτός του 20:

19, 18, 17, 16, 15, 14, 13

Ας προσθέσουμε αυτούς τους αριθμούς για να δούμε **ποιο είναι το μέγιστο δυνατό άθροισμα**:

19+18+17+16+15+14+13

Κάνουμε τους υπολογισμούς:

19+18+15+(16+14)+(17+13)
=19+18+15+60=(19+60)+(18+15)=79+33=112

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2022-23)

Ο κύριος Γιάννης αγοράζει μια σακούλα καραμέλες για τα δύο παιδιά του, Γιώργο και Δημήτρη, και τους δίνει κάποιες από αυτές τυχαία. Όταν πηγαίνουν στο σπίτι διαπιστώνουν ότι ο Γιώργος έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες από τον Δημήτρη και επτά φορές περισσότερες από αυτές που έμειναν στη σακούλα. Τα παιδιά τρώνε κάποιες από αυτές και την άλλη μέρα παίρνουν κάποιες ακόμη από τη σακούλα. Διαπιστώνουν ότι ο Δημήτρης έχει επτά φορές περισσότερες καραμέλες και από τον Γιώργο και από αυτές που απέμειναν στη σακούλα. Να αποδείξετε ότι τα παιδιά έφαγαν του

**Ενδεικτική Λύση**

Έστω $xx$ οι καραμέλες που πήρε την πρώτη μέρα ο Δημήτρης. Τότε $7xx$ είναι οι καραμέλες του Γιώργου και $xx$ είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως ο κύριος Γιάννης αγόρασε συνολικά $9xx$ καραμέλες. Έστω $yy$ οι καραμέλες του Γιώργου την δεύτερη μέρα. Τότε $7yy$ είναι οι καραμέλες του Δημήτρη και $yy$ είναι οι καραμέλες που έμειναν στη σακούλα. Επομένως την δεύτερη μέρα περίσσεψαν 9y καραμέλες. Αυτό σημαίνει ότι τα παιδιά έφαγαν 9x-9y καραμέλες.

Θέλουμε να αποδείξουμε ότι: $9x - 9y \geq \frac{3}{4} \cdot (9x) \Leftrightarrow x \geq 4y$. Θα αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Πράγματι, οι καραμέλες που είχε ο Δημήτρης συν τις καραμέλες της σακούλας την πρώτη μέρα, είναι σίγουρα περισσότερες από τις αντίστοιχες τη δεύτερα μέρα.

1η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $x + x = 2x$

2η μέρα: Δημήτρης και σακούλα έχουν $7y + y =$ 8y

Επομένως $2x \geq 8y \Leftrightarrow x \geq 4y$

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2021-22)

Οι καθηγητές των Μαθηματικών και Φυσικής βαθμολόγησαν για το Α τετράμηνο τους μαθητές ενός Τμήματος του Γυμνασίου τους ως εξής: Ο καθηγητής των Μαθηματικών έβαλε $\alpha$ φορές το βαθμό 20, $\beta$ φορές το βαθμό 18, $\gamma$ φορές το βαθμό 16 και $\delta$ φορές το βαθμό 14. Ο καθηγητής της Φυσικής έβαλε $\alpha$ φορές το βαθμό 18, $\beta$ φορές το βαθμό 16, $\gamma$ φορές το βαθμό 14 και $\delta$ φορές το βαθμό 20. Γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική. Να προσδιορίσετε τον αριθμό $N$ των μαθητών του Τμήματος, αν δίνεται ότι $20 < N < 28$.

**Ενδεικτική Λύση**

Σύμφωνα με την υπόθεση το πλήθος των μαθητών του Τμήματος είναι $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta$ και επειδή το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στα Μαθηματικά ισούται με το άθροισμα των βαθμών των μαθητών του Τμήματος στη Φυσική, έχουμε: $20\alpha + 18\beta + 16\gamma + 14\delta = 18\alpha + 16\beta + 14\gamma + 20\delta \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 6\delta \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 3\delta$. Επομένως, έχουμε $N = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\delta + \delta = 4\delta$ και αφού $20 < N < 28$, έπεται ότι $N = 24$.

**β τρόπος**

Σκέψη:

| Για τα μαθηματικά ισχύει | Για τη φυσική ισχύει |
|---|---|
| α φορές το 20 | α φορές το 18 |
| β φορές το 18 | β φορές το 16 |
| γ φορές το 16 | γ φορές το 14 |
| δ φορές το 14 | δ φορές το 20 |

Ας υποθέσουμε ότι α=1, β=2, γ=3 τότε ως σύνολο των βαθμών θα έχουμε

Για τα μαθηματικά $1 \cdot 20 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 16 + \delta \cdot 14 = 104 + \delta \cdot 14$

Για τη Φυσική $1 \cdot 18 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 14 + \delta \cdot 20 = 92 + \delta \cdot 20$

Οπότε $104 + \delta \cdot 14 = 92 + \delta \cdot 20$, άρα $12 = 6\delta$, οπότε θα πρέπει $\delta = 2$

Όμως $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$

Όμως $N = 8$ δε γίνεται διότι πρέπει $20 < N < 28$

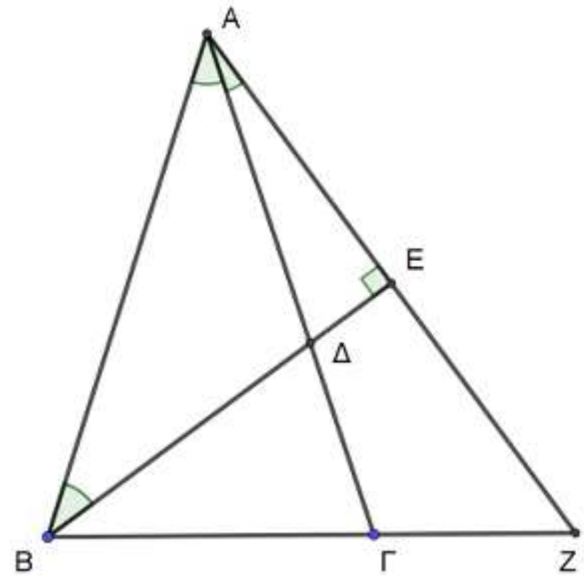
Το μόνο πολλαπλάσιο του 8 που είναι $20 < N < 28$ είναι το $3 \cdot 8 = 24$

Τελικά $N = 24$

# Κεφάλαιο 4 Γεωμετρία

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2025-26)

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ =ΑΓ. Το σημείο Δ ανήκει στην πλευρά ΑΓ έτσι ώστε το τρίγωνο ΒΓΔ να είναι ισοσκελές με ΒΓ =ΒΔ. Το σημείο Ζ ανήκει στην ευθεία ΒΓ, έτσι ώστε η ευθεία ΑΖ να είναι κάθετη προς την ευθεία ΒΔ στο σημείο Ε. Δίνεται επίσης ότι: $\widehat{BA\Delta} = \widehat{AB\Delta}$.




(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

(β) Να αποδείξετε ότι:
$$\widehat{BA\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Delta AE}$$

(γ) Να αποδείξετε ότι: ΑΓ = ΒΖ.

**Ενδεικτική Λύση**

(α) Γνωρίζω από υπόθεση ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ =ΑΓ οπότε και οι παρα τη βάση γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\omega}$.

Γνωρίζω από υπόθεση ότι το τρίγωνο ΒΓΔ είναι ισοσκελές με ΒΓ =ΒΔ οπότε και οι παρα τη βάση γωνίες είναι ίσες, δηλαδή $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\omega}$.

Συνεπώς, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = \widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{\omega}$

Γνωρίζω από υπόθεση ότι $\widehat{BA\Delta} = \widehat{AB\Delta} = \widehat{\varphi}$

Στο τρίγωνο ΒΔΓ ισχύει ότι $\widehat{B\Delta\Gamma} + \widehat{\omega} + \widehat{\omega} = 180° \Leftrightarrow \widehat{B\Delta\Gamma} = 180° - 2\widehat{\omega}$

Επίσης παρατηρώ ότι, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{AB\Delta} + \widehat{\Delta B\Gamma} \overset{\widehat{AB\Gamma}=\widehat{\omega}}{\Longleftrightarrow} \widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + 180° - 2\widehat{\omega} \Leftrightarrow 3\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + 180°$

Αρκεί να βρω μια σχέση ακόμα που να συνδέει τις γωνίες $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\omega}$

Στο τρίγωνο ΑΒΓ , ισχύει ότι ισχύει ότι $\widehat{\varphi} + \widehat{\omega} + \widehat{\omega} = 180° \Leftrightarrow \widehat{\varphi} = 180° - 2\widehat{\omega}$

Οπότε η σχέση $3\widehat{\omega} = \widehat{\varphi} + 180°$ γράφεται $3\widehat{\omega} = 180° - 2\widehat{\omega} + 180° \Leftrightarrow 5\widehat{\omega} = 360°$

Τελικά $\widehat{\omega} = 72°$ και συνεπώς $\widehat{\varphi} = 180° - 2\widehat{\omega} = 180° - 144° = 36°$

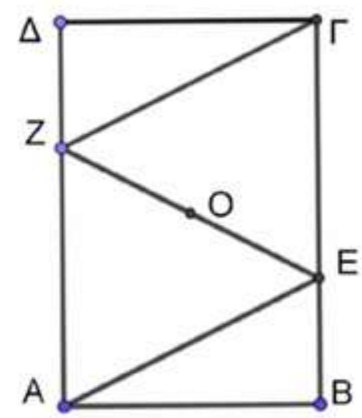
(β) Όπως είδαμε ισχύει $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\omega}$ και επιπλέον $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{A\Gamma B} = \widehat{\omega} = \widehat{A\Delta E}$ ως κατακόρυφη γωνίες. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ ισχύει $90° + 72° + \widehat{\Delta AE} = 180°$

οπότε $\widehat{\Delta AE} = 180° - 162° = 18°$. Τελικά ισχύει $\widehat{BA\Gamma} = 2 \cdot \widehat{\Delta AE}$ αφού $\widehat{BA\Gamma} = 36° = 2 \cdot 18°$.

(γ)

**Άσκηση** (Θαλής **Β** Γυμνασίου 2023-24)

Στο διπλανό σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΓΖ είναι παράλληλα και το σημείο Ο είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ. Να αποδείξετε ότι: (α) ΑΕ = ΓΖ. (β) ΒΕ = ΔΖ. (γ) Τα σημεία Β, Ο και Δ βρίσκονται στην ίδια ευθεία και το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΒΔ.




**Ενδεικτική Λύση**

(α) Επειδή από την υπόθεση είναι ΑΕ ∥ ΓΖ και ΑΖ ∥ ΕΓ το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες. Άρα έχουμε: ΑΕ = ΓΖ.

(β) Από το παραλληλόγραμμο ΑΕΓΖ προκύπτει ότι: ΑΖ =ΕΓ (1) Επίσης το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες, οπότε ΑΔ =ΒΓ (2) Με αφαίρεση κατά μέλη της ισότητας (1) από την ισότητα (2), έχουμε: ΑΔ−ΑΖ=ΒΓ−ΕΓ⇒ΔΖ=ΒΕ.

(γ) Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ είναι κοινή διαγώνιος στα παραλληλόγραμμα ΑΕΓΖ και ΑΒΓΔ. Επομένως το μέσο Ο της διαγωνίου ΕΖ είναι και μέσο της ΑΓ και επίσης από το Ο περνάει η διαγώνιος ΒΔ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ και επιπλέον αυτό είναι το μέσο της.