

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Έστω A ένα υποσύνολο του \mathbb{R} . Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$

Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Τι λέγεται σύνολο τιμών της f και πώς συμβολίζεται ;

Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τις τιμές της f σε όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και συμβολίζεται με $f(A)$. Είναι δηλαδή:

$$f(A) = \{y \mid y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$$

Τι λέγεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$; Πώς συμβολίζεται ;

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $M(x, y)$, $x \in A$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f

Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες ;

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και
- Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Πότε δύο συναρτήσεις f και g , με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα, λέμε ότι είναι ίσες σε ένα υποσύνολο Γ των A και B ;

Έστω τώρα f, g δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντιστοίχως και Γ ένα υποσύνολο των A και B . Αν για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει $f(x) = g(x)$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες στο σύνολο Γ .

Έστω δύο συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα. Πότε και πώς ορίζονται οι παρακάτω πράξεις ;

α. Άθροισμα $f + g$ β. Διαφορά $f - g$ γ. Γινόμενο $f \cdot g$ δ. Πηλίκο $\frac{f}{g}$

Ορίζουμε ως άθροισμα $f + g$, διαφορά $f - g$, γινόμενο $f \cdot g$, πηλίκο $\frac{f}{g}$ δύο συναρτήσεων f, g τις συναρτήσεις με τύπους

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Το πεδίο ορισμού των $f + g, f - g, f \cdot g$ είναι η τομή $A \cap B$ των πεδίων ορισμού A και B των συναρτήσεων f και g αντιστοίχως, ενώ το πεδίο ορισμού της $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$, εξαιρούμενων των τιμών του x που μηδενίζουν τον παρονομαστή $g(x)$, δηλαδή το σύνολο $\{x | x \in A \text{ και } x \in B, g(x) \neq 0\}$

Έστω δύο συναρτήσεις f και g , με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα. Τι ονομάζουμε σύνθεση της συνάρτησης f με την g και πώς συμβολίζεται; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της και πότε ορίζεται;

Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g . Δηλαδή είναι το σύνολο

$$A_1 = \{x \in A | f(x) \in B\}$$

Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται:

Γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$

Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$

Πότε μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ ;

Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, τότε λέμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο ;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο ;

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

Παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

Τι λέγονται (ολικά) ακρότατα μιας συνάρτησης f ;

Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης f λέγονται ολικά ακρότατα της f .

ΣΩΣΤΟ – ΛΑΘΟΣ

- 1) Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
- 2) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f .
- 3) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από αυτό τον άξονα.
- 4) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.
- 5) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.
- 6) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

- 7) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f \circ g = g \circ f$.
- 8) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε είναι υποχρεωτικά $f \circ g \neq g \circ f$.
- 9) Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f , για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .
- 10) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ h)$ τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- 11) Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ τέτοια, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

ΑΝΤΙΠΑΡΔΕΙΓΜΑ

- 1) Κάθε καμπύλη σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

Λάθος, π.χ. ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.

- 2) Αν δυο συναρτήσεις έχουν ίδιο τύπο, τότε είναι ίσες.

Λάθος, π.χ. $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ και $g(x) = x + 1$ δεν είναι ίσες λόγω του ότι έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού.

- 3) Εάν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες

Λάθος, π.χ. οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{x}$

$$\text{ισχύει } D_{g \circ f} = \begin{cases} x > 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases} = x \geq 1$$

$$\text{ισχύει } D_{f \circ g} = \begin{cases} x \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} = x > 0$$

Αφού έχουν διαφορετικά πεδία ορισμού δεν είναι ίσες

- 4) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(x) \cdot g(x) = 0$ αν και μόνον αν $f(x) = 0$ ή $g(x) = 0$**

Λάθος, π.χ. $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

Ισχύει για $x \leq 0$, ότι $(x) \cdot g(x) = 0$ για $x > 0$, ότι $(x) \cdot g(x) = 0$ όμως καμία δεν είναι ίση με 0

- 5) Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) = g^2(x)$ αν και μόνον αν $f(x) = \pm g(x)$**

Λάθος, π.χ. $f(x) = \begin{cases} -\eta\mu x, & x \leq 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$ και $g(x) = \eta\mu^2 x$

Ισχύει $f^2(x) = g^2(x)$ όμως $f(x) \neq \pm g(x)$

- 6) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ θα έχει πάντα ελάχιστη ή μέγιστη τιμή**

Λάθος, π.χ. $f(x) = x^3$, δεν έχει ούτε ελάχιστη ή ούτε μέγιστη τιμή

- 7) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο ή (ολικό) ελάχιστο, θα είναι σε μοναδικό σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της**

Λάθος, π.χ. $f(x) = \eta\mu x$, παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο με τιμή 1 ή (ολικό) ελάχιστο με τιμή -1 σε άπειρες θέσεις

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής, αιτιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

- 1. Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$**

β) $(f \circ g)(x) = -x, x \in \mathbb{R}$

Απόδειξη

α) Γνωρίζουμε $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$. Οπότε $D_{g \circ f} = \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$

Άρα $D_{g \circ f} = (0, +\infty) \neq \mathbb{R}^*$. Ο ισχυρισμός είναι **ΨΕΥΔΗΣ**.

β) Γνωρίζουμε $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}$. Οπότε $D_{f \circ g} = \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ e^{-x} > 0 \text{ ισχύει} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα $D_{f \circ g} = \mathbb{R}$. Επιπρόσθετα

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(e^{-x}) = \ln e^{-x} = -x, x \in \mathbb{R}$. Ο ισχυρισμός είναι **ΑΛΗΘΗΣ**.

Βασικές Ασκήσεις από το βιβλίο του Μπάρλα τόμος Α

Ασκήσεις 1 έως και 4 σελίδες 301,302

Ασκήσεις 7 έως 11 σελίδες 304-306

Άσκηση 13 σελίδα 63

Άσκηση 10 σελίδα 61

Ασκήσεις 1 έως και 8 σελίδες 52-59

Ασκήσεις 5,6 σελίδες 40-41

Άσκηση 3 σελίδα 39

Ασκήσεις 1-2 σελίδα 38

Ασκήσεις 3- 5 σελίδες 9-10

