ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Η Επανάληψη για το Σεπτέμβριο

Α1. Συναρτήσεις

Α1.1 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ D_f

Συνάρτηση f	Συνθήκη ώστε η παράσταση $N(x)$ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού
$N(x) = \frac{1}{T(x)}$	Πρέπει και αρκεί $T(x) \neq 0$
$N(x) = \sqrt[\kappa]{T(x)}$, $\kappa \in \mathbb{N}^*$ με $\kappa \geq 2$ ή $N(x) = \left(T(x)\right)^{\frac{\lambda}{\kappa}}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{N}^*$	Πρέπει και αρκεί $T(x) \geq 0$
$N(x) = \varepsilon\varphi(T(x))$	Πρέπει και αρκεί $T(x) \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$N(x) = \sigma\varphi(T(x))$	Πρέπει και αρκεί $T(x) \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$
$N(x) = \ln\,(T(x))$ ή $N(x) = \log\,(T(x))$	Πρέπει και αρκεί $T(x) > 0$
$N(x) = \begin{cases} T_1(x), \alpha\nu\ x \in A_1 \\ T_2(x), \alpha\nu\ x \in A_2 \end{cases}$	$D_f = A_1 \cup A_2$
Για τις συναρτήσεις τις μορφής $N(x)^{T(x)} = e^{T(x)\cdot\ln(N(x))}$	Συνήθως θα δίνεται ή θα προκύπτει ότι $N(x) > 0$

Α1.2 ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΤΗΣ C_f ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ – ΣΧΕΤΙΚΗ ΘΕΣΗ C_f, C_g

- Σημεία τομής τις C_f με τον άξονα $x'x$: λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$
- Σημεία τομής τις C_f με τον άξονα $y'y$: βρίσκουμε το $f(0)$ εάν $0 \in D_f$

Σχετική θέση τις C_f με τον άξονα $x'x$ (πρόσημο της f)

- Η C_f βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα $x'x$ για τα $x \in D_f$ με $f(x) > 0$
- Η C_f βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα $x'x$ για τα $x \in D_f$ με $f(x) < 0$
- Η C_f **ΔΕΝ** βρίσκεται «πάνω» από τον άξονα $x'x$ για τα $x \in D_f$ με $f(x) \leq 0$
- Η C_f **ΔΕΝ** βρίσκεται «κάτω» από τον άξονα $x'x$ για τα $x \in D_f$ με $f(x) \geq 0$

<u>Άσκηση 001</u> Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+\alpha}{|x-1|+2}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση τις f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -3. Να βρείτε

α. Το πεδίο ορισμού της f
β. Τον αριθμό α
γ. Τα σημεία τομής της C_f με τις άξονες
δ. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$

Σχετική θέση δύο γραφικών παραστάσεων C_f , C_g

- Τα σημεία τομής των C_f , C_g έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με $x \in D_f \cap D_g$
- Η C_f βρίσκεται «πάνω» από τη C_g για τα $x \in D_f \cap D_g$ με
$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) > 0$$
- Η C_f βρίσκεται «κάτω» από τη C_g για τα $x \in D_f \cap D_g$ με
$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) < 0$$

Άσκηση 002 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ και $g(x) = x^3 - 3x^2 + \beta - 6\alpha$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -3 και η C_g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -6, να βρείτε:

α. Τους αριθμούς α και β

β. Τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από τη C_g

<u>Χορδή τις f είναι το ευθύγραμμο τμήμα που έχει άκρα δύο σημεία τις C_f</u>

- Οριζόντια χορδή της $C_f \Leftrightarrow$ Υπάρχουν $x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2)$

<u>Η C_f διέρχεται από το σημείο $N(x, y) \Leftrightarrow f(x) = y$</u>

Α1.3 ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

i) Έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α και
ii) Για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Σχόλιο: Αν $A \subseteq D_f \cap D_g$ με $A \neq \emptyset$ και ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$, τότε λέμε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες στο σύνολο Α

❖ Μεθοδολογία: Πως αποδεικνύω ότι δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες

1ο Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων D_f , D_g

2ο Αν $D_f = D_g$, τότε συνεχίζουμε και ελέγχουμε αν για κάθε x $\in D_f \cap D_g$ ισχύει $f(x) = g(x)$. Στην περίπτωση που ισχύει λέμε ότι οι συναρτήσεις είναι ίσες, διαφορετικά οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες

Αν τα πεδία ορισμού είναι διαφορετικά $D_f \neq D_g$, λέμε ότι οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες. Εάν ζητείτε να βρούμε το «ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο είναι ίσες, τότε περιοριζόμαστε στη τομή $D_f \cap D_g$ και ελέγχουμε εάν για κάθε $x \in D_f \cap D_g$ ισχύει $f(x) = g(x)$

Άσκηση 003 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln|x| - \ln\ |x-1|$ και $g(x) = ln\frac{x}{x-1}$.Να εξετάσετε εάν $f = g$. Στην περίπτωση που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε εάν υπάρχει το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

Άσκηση 004 Έστω οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{(\lambda-2)x^2 - x + 4 + \lambda}{x - 2\lambda^2}$$

και

$$g(x) = \frac{3\lambda - x}{x - 8}$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $f = g$

Σημείωση: Έστω f, g: $\{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{13}$ και $g(x) = x^{23}$. Είναι $D_f = D_g$ αλλά έχουν διαφορετικό τύπο, παρόλα αυτά είναι ίσες

Α1.4 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΠΡΑΞΗ		ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ	ΤΥΠΟΣ
ΑΘΡΟΙΣΜΑ	$f+g$	$D_f \cap D_g \neq \emptyset$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$
ΔΙΑΦΟΡΑ	$f-g$	$D_f \cap D_g \neq \emptyset$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$
ΓΙΝΟΜΕΝΟ	$f\cdot g$	$D_f \cap D_g \neq \emptyset$	$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$
ΠΗΛΙΚΟ	$\frac{f}{g}$	$D_{\frac{f}{g}}=\{x\in D_f \cap \frac{D_g}{g(x)}\neq 0\}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

Α1.5 ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1ο Βρίσκουμε τα D_f , D_g (τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f, g)

2ο Η $g\circ f$ (η σύνθεση τις f με τη g) ορίζεται εάν

$$D_{g\circ f}=\{x\in D_f / f(x)\in D_g\}\neq \emptyset$$

3ο Ο τύπος της $(g\circ f)(x)=g(f(x))$

Άσκηση 005 Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ και $g(x) = \frac{1+x}{1-x}$

α) Να οριστούν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$
(ισχύει $f \circ g = g \circ f$;)
β) Να σχεδιαστούν οι $C_{g\circ f}$ και $C_{f\circ g}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων
γ) Να αποδειχθεί ότι $(f \circ g)(x) \cdot (g \circ f)(x) = -1$ για κάθε $x \neq -1,0,1$

Σχόλιο: Πεδίο ορισμού $D_{f\circ w}$, της σύνθεσης $f \circ w$

Άσκηση 006 Έστω η συνάρτηση $g(x) = f\left(\frac{lnx}{e^x+1}\right)$ με $D_f = [0,+\infty)$ να βρεθεί το D_g

Σχόλιο: Πεδίο ορισμού της $f \circ g \circ h$

Άσκηση 007 Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}\,,\, g(x) = x^2 - 1\,,\, h(x) = \sqrt{x - 2}$$

Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g \circ h$

Σ/Λ Ισχύει πάντα $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Α1.6 ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ $f \circ g$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΤΗ g

1ο Θέτουμε $g(x) = u$

2ο Λύνουμε την παραπάνω σχέση ως προς x

3ο Αντικαθιστούμε το x που βρήκαμε στο τύπο $f\big(g(x)\big)$

Άσκηση 008 Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - 2$ και η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(g \circ h)(x) = x^2 - 9x + 23$$

α. Να βρείτε τη συνάρτηση g

β. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = g(x)$. Να βρείτε το $f(3)$

Α1.7 ΑΠΟΣΥΝΘΕΣΗ $f \circ g$ ΜΕ ΓΝΩΣΤΗ ΤΗ f

1ο θέτουμε όπου x το $g(x)$ στο τύπο τις $f(x)$

2ο Έχουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$ με δύο μορφές (μία αυτή που βρήκαμε προηγουμένως και μία από τα δεδομένα). Εξισώνουμε τις δύο αυτές μορφές και βρίσκουμε την $g(x)$

Άσκηση 009 Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με: $g(x) = 3x - 2$ και $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 6x + 10$

α. Να βρείτε τη συνάρτηση f
β. Να βρείτε σε ποια διαστήματα η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g

Α1.8 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ

Άσκηση 10 Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (\eta\mu\alpha)^x + (\sigma\upsilon\nu\alpha)^x$, $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση $1 + (\sigma\varphi\alpha)^x < \frac{1}{(\eta\mu\alpha)^x}$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{1}{x} + 1\right) + lnx = 1$

Επίλυση εξίσωσης με ακρότατα:

- Έστω συνάρτηση $f\colon A \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο ίσο με κ ΜΟΝΟ στη θέση $x = x_0$, τότε:

$$f(x) = \kappa \Leftrightarrow x = x_0$$

$$f\big(g(x)\big) = \kappa \Leftrightarrow g(x) = x_0$$

- Έστω συναρτήσεις $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει η f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με κ ΜΟΝΟ στη θέση $x = x_0$ και η g παρουσιάζει μέγιστο ίσο με κ ΜΟΝΟ στη θέση $x = x_0$, τότε

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = x_0$$

Άσκηση 11 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο ίσο με 1.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\big(1 - f(x-2)\big) = 1$

γ) i) Να αποδείξετε ότι $f(2x) = 2f^2(x) - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) - 3f(x) + 2 = 0$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{x^2 + x + 2}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.