

**Ορισμός:** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Ορισμός:** Μια συνάρτηση  $f$  λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει  $f(x_1) > f(x_2)$ .

### Βασική Άσκηση 1

Να μελετήσετε τη μονοτονία της  $f(x) = 2x^3 + 3x + 5$ .

#### Λύση

$$A_f = \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \xrightarrow{x^3 \nearrow} x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3 \\ x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)}$$

$$\xrightarrow{(+)} 2x_1^3 + 3x_1 < 2x_2^3 + 3x_2$$

$$\Leftrightarrow 2x_1^3 + 3x_1 + 5 < 2x_2^3 + 3x_2 + 5 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ άρα η } f \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

**Σχόλιο:** Μια συνάρτηση μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) σε δυο διαστήματα  $\Delta_1, \Delta_2$ , αλλά να μην είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) στο σύνολο  $\Delta_1 \cup \Delta_2$ .

#### Παράδειγμα

Η συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{x}$  όπου  $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

### ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

**A.** Η συνάρτηση  $f(x) = \lambda x + \kappa, \lambda, \kappa \in \mathbb{R}$

- Αν  $\lambda = 0$  τότε η  $f$  σταθερή.
- Αν  $\lambda > 0$  τότε η  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .
- Αν  $\lambda < 0$  τότε η  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**B.** Η συνάρτηση  $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$ ,

Αν  $a > 0$  τότε  $f$  γνησίως φθίνουσα στο  $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a}\right]$  και γνησίως αύξουσα στο  $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty\right)$ .

Αν  $a < 0$  τότε  $f$  γνησίως αύξουσα στο  $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2a}\right]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $\left[-\frac{\beta}{2a}, +\infty\right)$ .

**Ορισμός:** Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **(ολικό) μέγιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \leq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

**Ορισμός:** Μια συνάρτηση  $f$ , με πεδίο ορισμού το  $A$ , θα λέμε ότι παρουσιάζει στο  $x_0 \in A$  **(ολικό) ελάχιστο**, το  $f(x_0)$ , όταν  $f(x) \geq f(x_0)$  για κάθε  $x \in A$

### Παρατηρήσεις

1. Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο της συνάρτησης  $f$  λέγονται **ολικά ακρότατα** της  $f$
2. Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει μέγιστο, μπορεί να παρουσιάζει ελάχιστο, μπορεί να παρουσιάζει και μέγιστο και ελάχιστο, μπορεί να μην έχει ούτε ελάχιστο ούτε μέγιστο.
3. Η σχέση  $f(x) \leq M$  δεν δηλώνει ότι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι το  $M$ . Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να υπάρχει  $x_0 \in A_f$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = M$ .  
Αντίστοιχα για ελάχιστο.

### Βασική Άσκηση 2

Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων  $f(x) = 3\sqrt{x-2} + 2$  και  $g(x) = \frac{3}{x^2+1}$ .

#### Λύση

Για  $f(x) = 3\sqrt{x-2} + 2$ , έχουμε  $A_f = 2, +\infty$  τότε  $\sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x-2} + 2 \geq 2 \Leftrightarrow f(x) \geq 2$

Αν  $f(x_0) = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x_0-2} + 2 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_0-2} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$

Άρα η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 2$  το  $m = 2$ .

Για  $g(x) = \frac{3}{x^2+1}$ , έχουμε  $A_g = \mathbb{R}$ , τότε

$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x^2+1} \leq 3 \Leftrightarrow g(x) \leq 3$

$g(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{x_0^2+1} = 3 \Leftrightarrow x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Άρα η  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 0$  το  $m = 3$ .

## Ασκήσεις

Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

i)  $f(x) = 1 - (x + 3)^2$

ii)  $g(x) = \frac{4}{2x^2+1}$

iii)  $h(x) = \sqrt{2x - 1} + 3$

iv)  $w(x) = x^2 - 2x + 4$