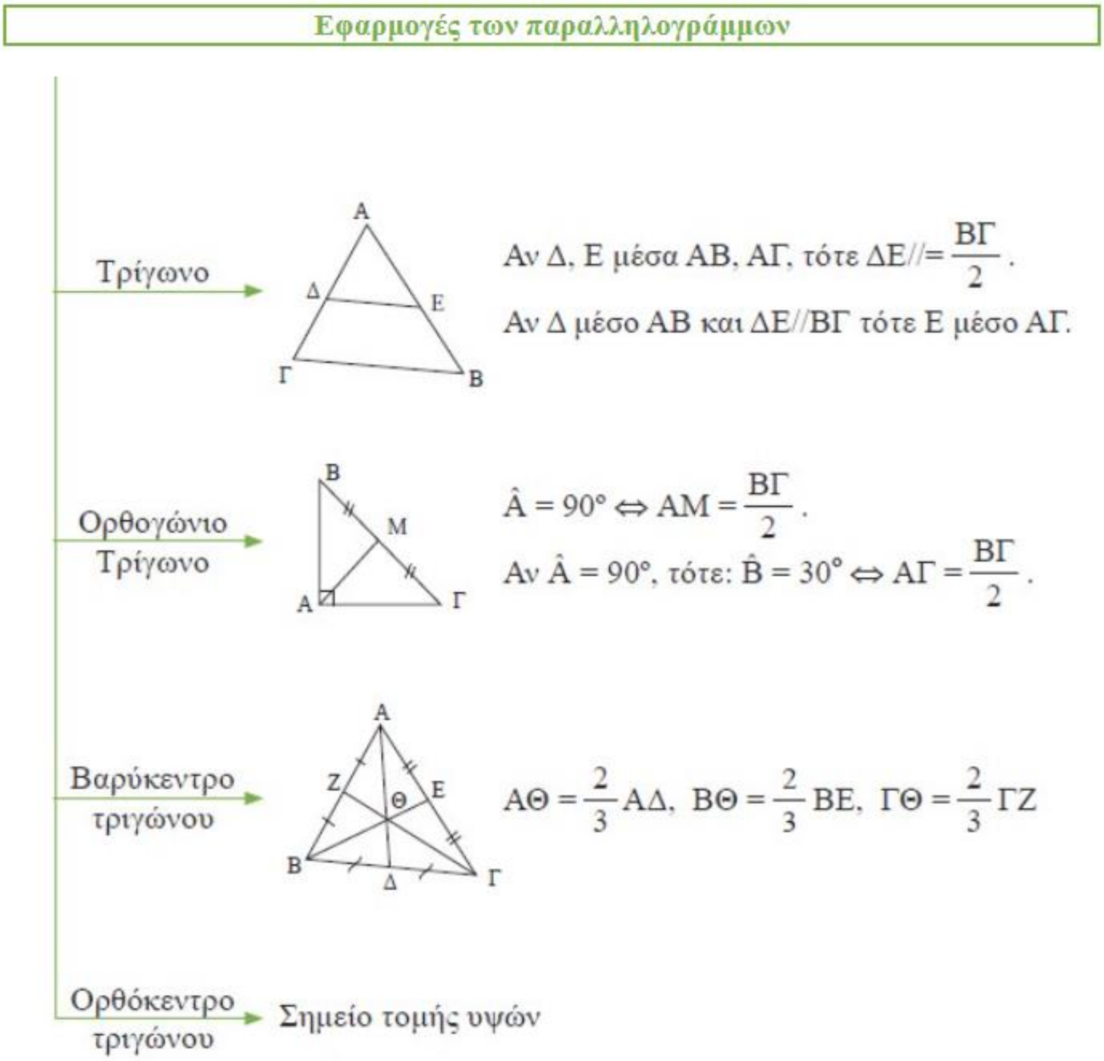
<u>ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ</u>



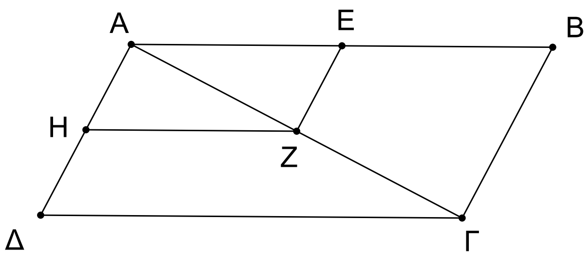
<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ 2_13532

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΖΗ = \frac{ΑΒ}{2}$. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ 2_1616

Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΔ με ΑΒ = ΒΔ = 5 και ΑΓΕ με ΑΓ = ΓΕ = 5 έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.

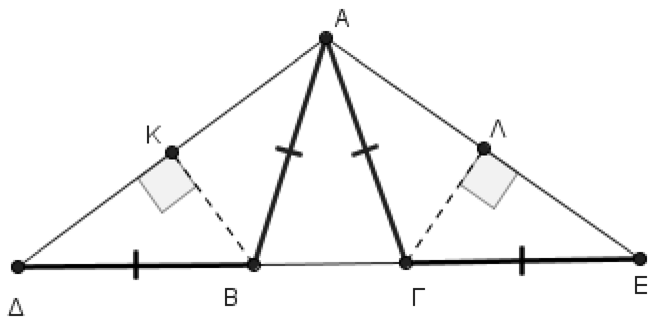
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.

(Μονάδες 9)

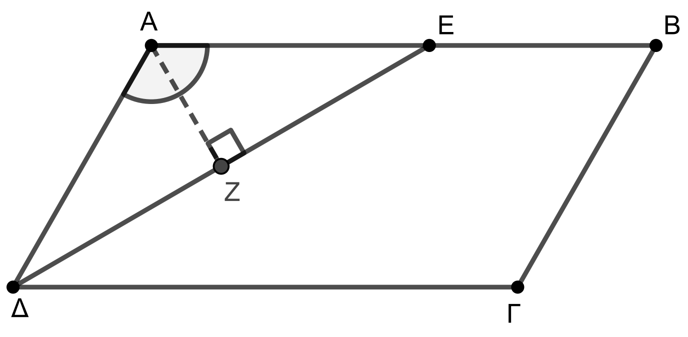


ΘΕΜΑ 2_14876

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\widehat{A}$ = 120° και ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία $A\widehat{\Delta}E$ = 30° (Μονάδες 10)

β) ΑΖ = $\frac{AB}{4}$ (Μονάδες 15)

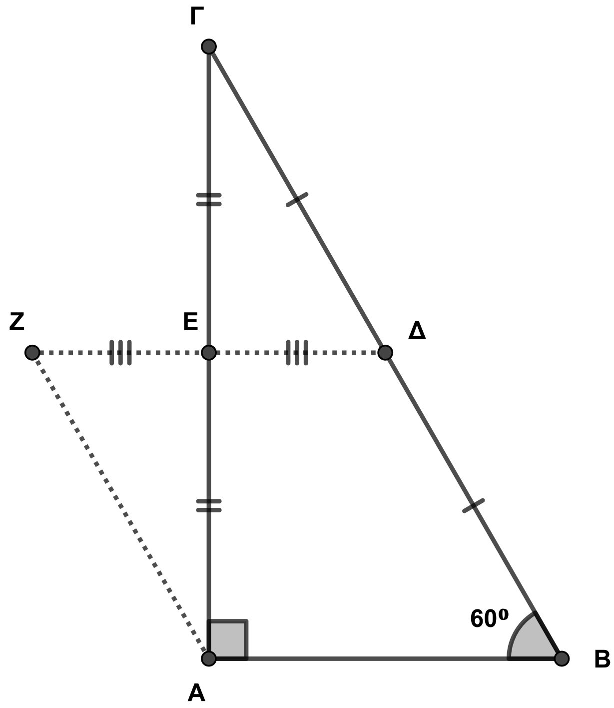


ΘΕΜΑ 2_13837

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$=90° και $\widehat{B}$=60° . Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

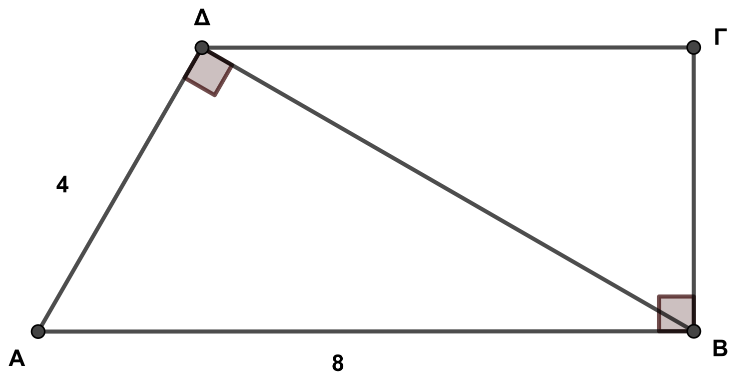


ΘΕΜΑ 2_13828

Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $Δ\widehat{A}B$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ. (Μονάδες 13)



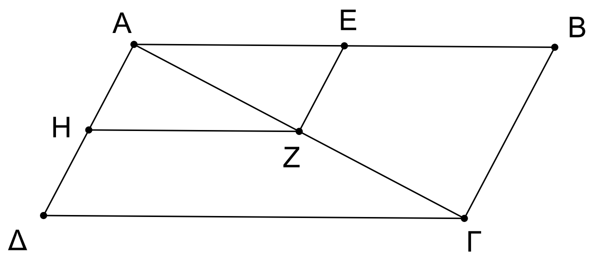
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2_13532

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\text{ΖΗ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΛΥΣΗ

α) Στο τρίγωνο ΑΓΔ το τμήμα ΖΗ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΔ, άρα είναι παράλληλο στη ΓΔ και ίσο με το μισό της, δηλαδή ΖΗ//ΓΔ (1) και $\text{ΖΗ} = \frac{\text{ΓΔ}}{2}$. Όμως ΑΒ = ΓΔ, γιατί είναι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου, άρα $\text{ΖΗ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$.

β) Αφού το Ε είναι το μέσο της ΑΒ, θα είναι $\text{ΑΕ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$. Όμως από το ερώτημα α) είναι $\text{ΖΗ} = \frac{\text{ΑΒ}}{2}$, άρα $\text{ΑΕ} = \text{ΖΗ}$.

Επιπλέον, είναι ΑΕ//ΓΔ (2), γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΑΕ//ΖΗ.

Το τετράπλευρο ΑΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι απέναντι πλευρές του ΑΕ, ΖΗ είναι ίσες και παράλληλες.

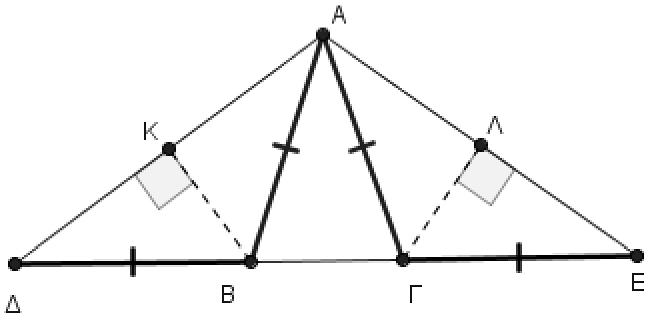
ΘΕΜΑ 2_1616

Θεωρούμε τρίγωνα ΑΒΔ με ΑΒ = ΒΔ = 5 και ΑΓΕ με ΑΓ = ΓΕ = 5 έτσι ώστε τα σημεία Δ, Β, Γ και Ε να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους ΒΚ και ΓΛ αντίστοιχα.

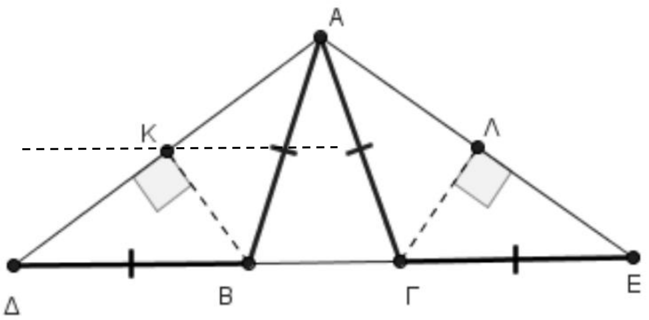
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή.

β) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ είναι τα μέσα των τμημάτων ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα.

γ) Αν η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα ΚΛ.



ΛΥΣΗ



α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ισοσκελή, γιατί είναι ΑΒ = ΒΔ και ΑΓ = ΓΕ, αντίστοιχα.

β) Το ΒΚ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΔ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσος του τριγώνου, οπότε το Κ είναι μέσο του ΑΔ.

Όμοια, το ΓΛ είναι ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ που αντιστοιχεί στη βάση του, άρα είναι και διάμεσός του, συνεπώς το Λ είναι μέσο του ΑΕ.

γ) Είναι ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 12. Όμως ισχύει ΑΒ = ΒΔ = ΑΓ = ΓΕ, άρα ΒΔ + ΓΕ + ΒΓ = 12.

Το τμήμα ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΔΕ, άρα

$$\text{ΚΛ} = \frac{\text{ΔΕ}}{2} = \frac{\text{ΒΔ}+\text{ΓΕ}+\text{ΒΓ}}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

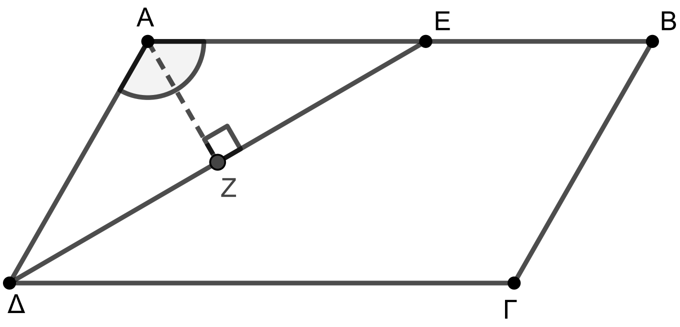
ΘΕΜΑ 2_14876

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με γωνία $\widehat{A}$ = 120° και ΑΒ=2ΑΔ. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Δ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε, και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα ΑΖ στη ΔΕ. Να αποδείξετε ότι:

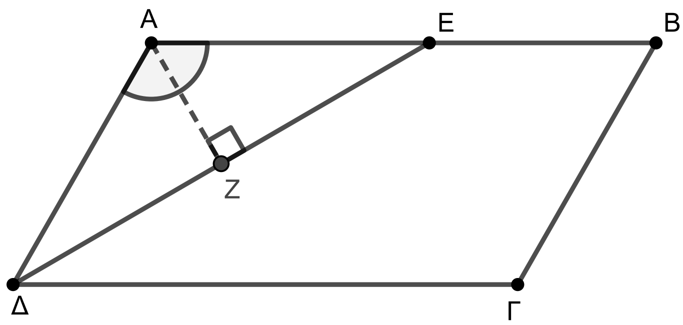
ΝΤΑΝΟΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ – ΑΡΙΘΜΟΛΕΞΟ 2

α) γωνία $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = 30^{\circ}$

β) ΑΖ = $\frac{\mathrm{AB}}{4}$



ΛΥΣΗ



α) Οι γωνίες $\widehat{\mathrm{A}}$ και $\widehat{\Delta}$ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ είναι παραπληρωματικές, ως γωνίες εντός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΒ και ΔΓ που τις τέμνει η ΑΔ, δηλαδή $\widehat{\mathrm{A}} + \widehat{\Delta} = 180^{\circ}$. Επειδή είναι $\widehat{\mathrm{A}} = 120^{\circ}$ τότε $\widehat{\Delta} = 60^{\circ}$ και αφού ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$ θα είναι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = 30^{\circ}$.

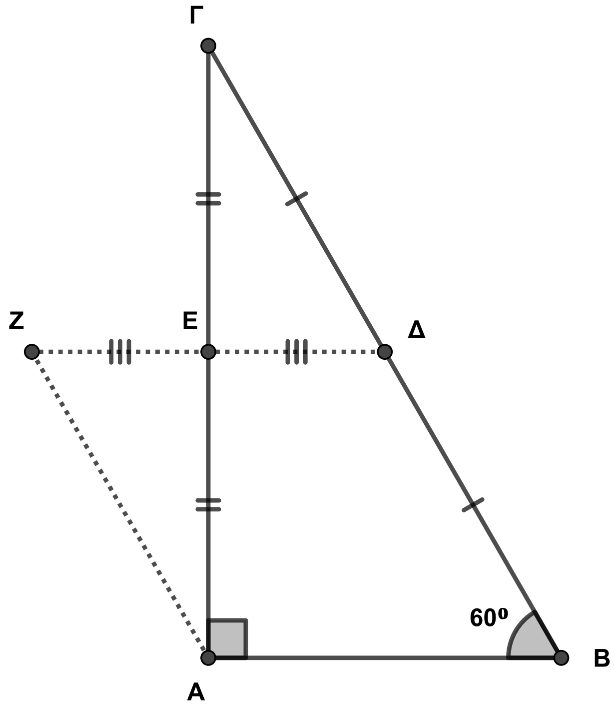
β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΖ (ΑΖ $\perp$ ΔΕ) είναι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = 30^{\circ}$, οπότε η απέναντι κάθετη πλευρά από τη γωνία αυτή ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή ΑΖ = $\frac{\mathrm{A\Delta}}{2}$. Όμως είναι ΑΔ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ από την υπόθεση, οπότε ΑΖ = $\frac{\mathrm{AB}}{4}$.

ΘΕΜΑ 2_13837

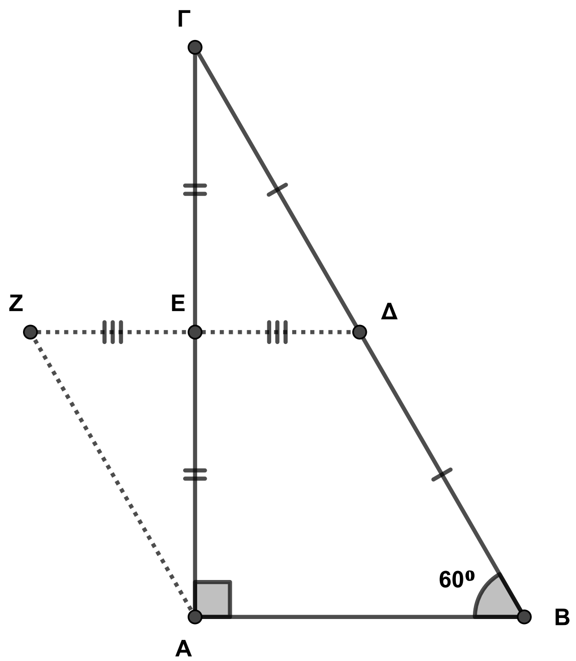
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}$=90° και $\widehat{B}$=60° . Θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε που είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ=ΔΕ.

α) Να αποδείξετε ότι ΓΔ=ΑΖ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΖΑΒ είναι ισοσκελές.



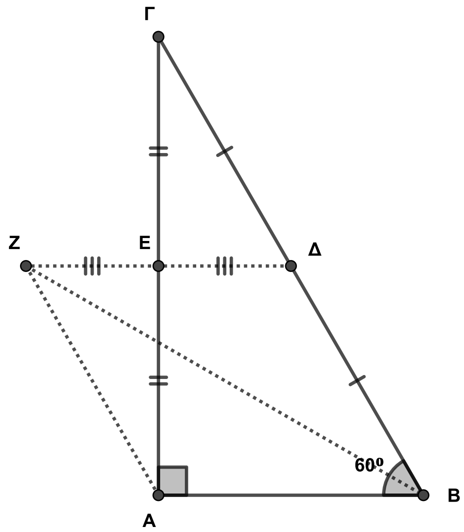
ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΓΕΔ που έχουν:

i. ΑΕ=ΕΓ (από υπόθεση)
ii. ΕΖ=ΕΔ (από υπόθεση)
iii. Α$\widehat{E}$Ζ=Γ$\widehat{E}$Δ (ως κατακορυφήν)

Τα τρίγωνα είναι ίσα αφού έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες, άρα ΑΖ=ΓΔ ως απέναντι πλευρές των ίσων γωνιών Α$\widehat{E}$Ζ=Γ$\widehat{E}$Δ.



β) ΑΖ=ΓΔ από το α) ερώτημα και ΓΔ=ΔΒ επειδή το σημείο Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Άρα ΑΖ = ΔΒ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$.

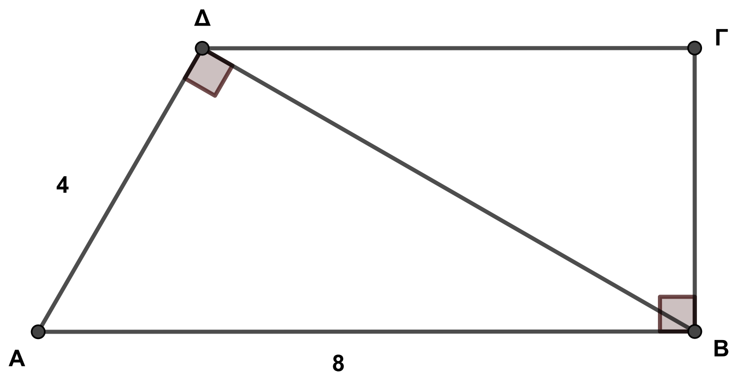
Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουμε ότι $\hat{\Gamma}$=30º, συνεπώς η απέναντι κάθετη πλευρά ΑΒ ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΓ, δηλαδή ΑΒ = $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$. Άρα ΑΖ = ΑΒ και το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

<u>ΘΕΜΑ 2 _13828</u>

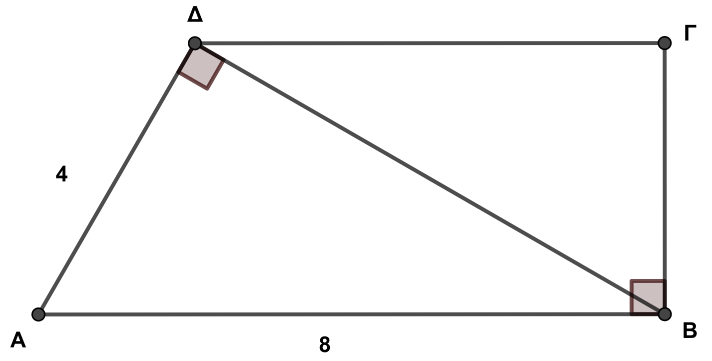
Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ η διαγώνιος ΒΔ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΔ και η πλευρά ΓΒ κάθετη στη βάση ΑΒ. Αν ΑΔ=4 και ΑΒ=8 τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία $\Delta\hat{A}B$.

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι διπλάσια της πλευράς του ΒΓ.



ΛΥΣΗ



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΑΒ είναι διπλάσια της κάθετης πλευράς ΑΔ άρα η οξεία γωνία $\Delta\widehat{B}A$ ισούται με 30^o δηλαδή $\Delta\widehat{B}A=30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε $\Delta\widehat{A}B+\widehat{\Delta}+\Delta\widehat{B}A=180^o$ ή $\Delta\widehat{A}B=60^o$.

β) Οι βάσεις ΑΒ και ΔΓ του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι κάθετες στην ΒΓ άρα το τρίγωνο ΔΓΒ είναι ορθογώνιο στο Γ. Οι γωνίες $A\widehat{B}\Delta$ και $B\widehat{\Delta}\Gamma$ είναι ίσες ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται από την ΒΔ, άρα $A\widehat{B}\Delta=B\widehat{\Delta}\Gamma=30^o$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΓΒ η κάθετη πλευρά ΒΓ βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία 30^o άρα ισούται με το μισό της υποτείνουσας ΒΔ, δηλαδή $B\Gamma = \frac{B\Delta}{2}$ ή ΒΔ=2ΒΓ.