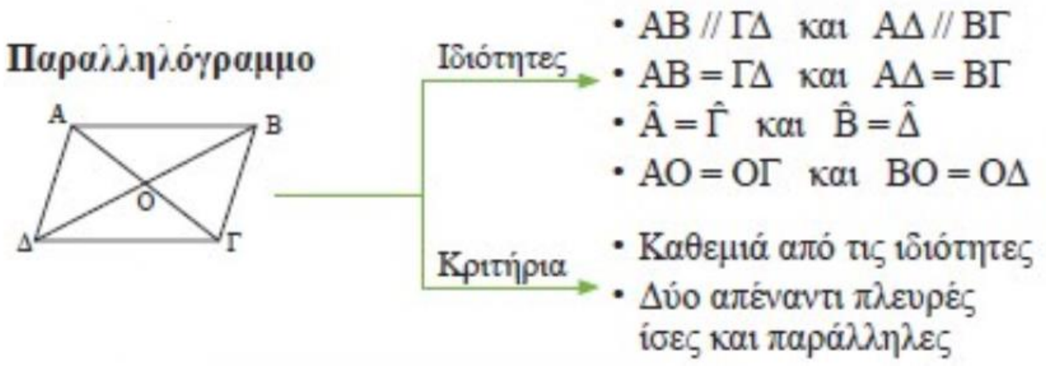
ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

ΘΕΩΡΙΑ



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β1

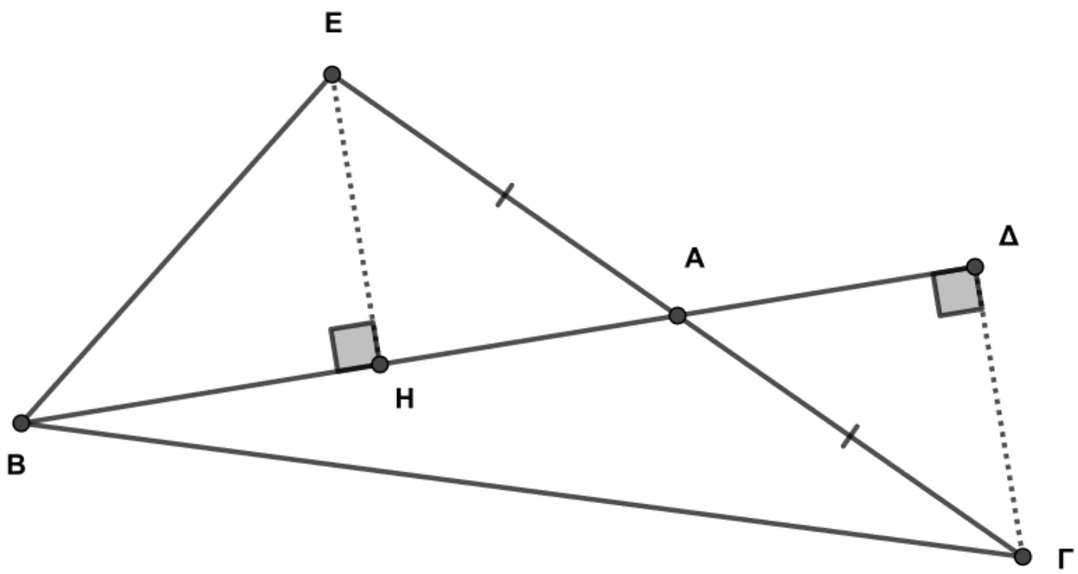
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



ΘΕΜΑ Β2

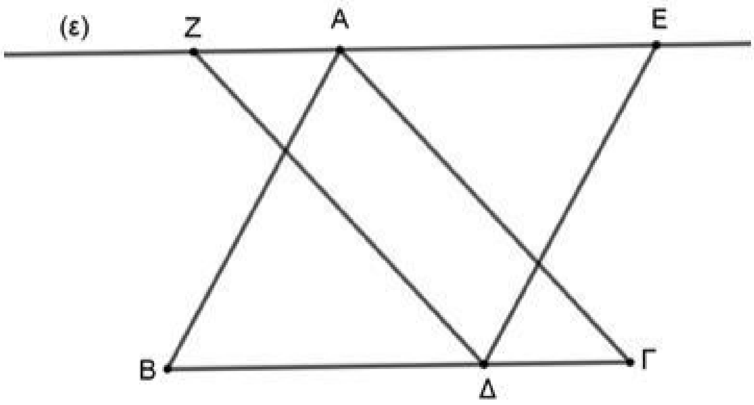
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

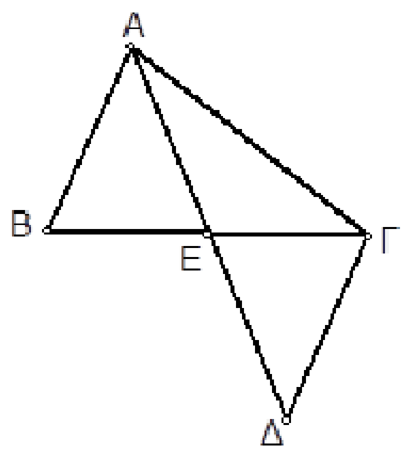
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΘΕΜΑ Β1

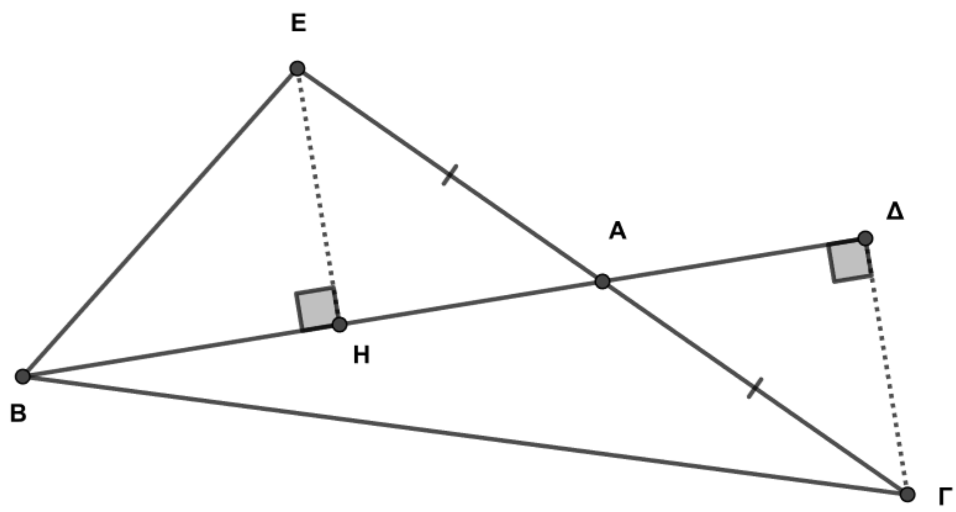
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το ΓΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, το ΕΗ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΕ και η ΒΑ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΕΓ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ΑΗ=ΑΔ. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



α) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΔ και ΑΕΗ που έχουν:

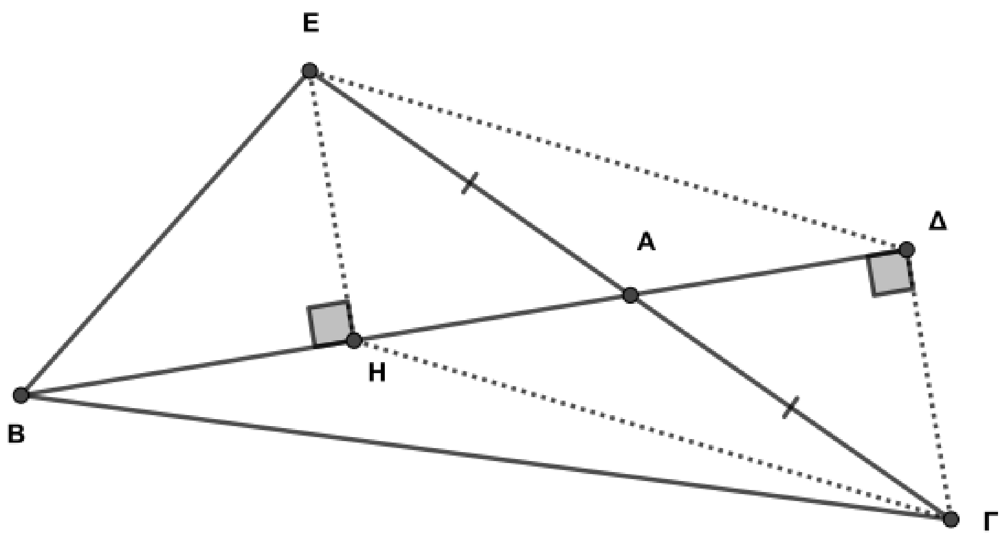
i. $\widehat{Η}=\widehat{Δ}=90^o$ (γιατί ΓΔ και ΕΗ ύψη)

ii. ΑΓ=ΑΕ (γιατί ΒΑ διάμεσος από υπόθεση)

iii. $Δ\widehat{Α}Γ=Ε\widehat{Α}Η$ (ως κατακορυφήν)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία.

β) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΓΔ και ΑΕΗ του προηγούμενου ερωτήματος προκύπτει ότι $A\hat{E}H = A\hat{\Gamma}\Delta$ άρα και ΑΗ=ΑΔ ως πλευρές ίσων τριγώνων απέναντι από ίσες γωνίες.



ΘΕΜΑ Β2

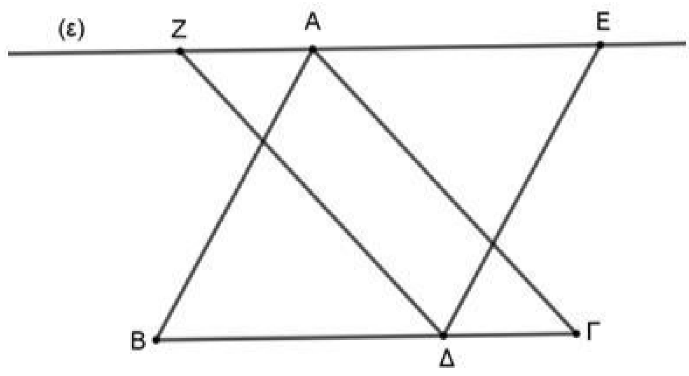
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη ΒΓ. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΒΓ φέρουμε τις παράλληλες προς την ΑΒ και ΑΓ, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα ΖΑΓΔ και ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα. (Μονάδες 15)



ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΖΑ // ΔΓ.

Από την υπόθεση έχουμε ΖΔ // ΑΓ.

Άρα το τετράπλευρο ΖΑΓΔ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

Επειδή η ευθεία (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ, προκύπτει ΑΕ // ΒΔ.

Από την υπόθεση έχουμε ΔΕ // ΒΑ.

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΔΕ έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν:

- ΑΒ = ΔΕ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΑΒΔΕ
- ΑΓ = ΔΖ, ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΖΑΓΔ
- ΒΓ = ΖΕ, διότι ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ και ΖΕ = ΖΑ + ΑΕ και ΒΔ = ΑΕ, ΔΓ =ΖΑ ως απέναντι πλευρές των παραλληλογράμμων ΖΑΓΔ, ΑΒΔΕ αντίστοιχα.

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Δ

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

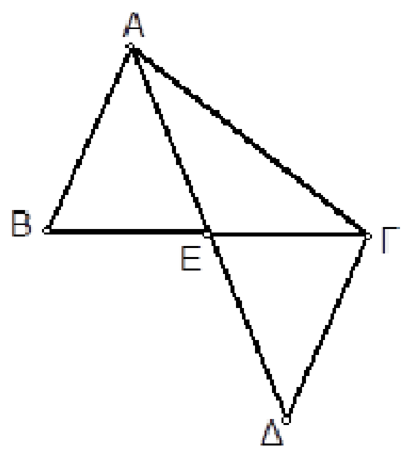
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ. (Μονάδες 5)

ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)

iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ. (Μονάδες 8)

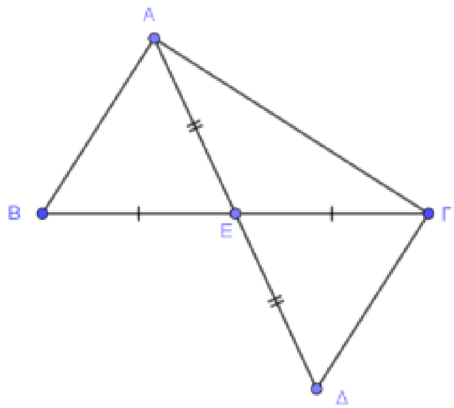
β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ. (Μονάδες 7)



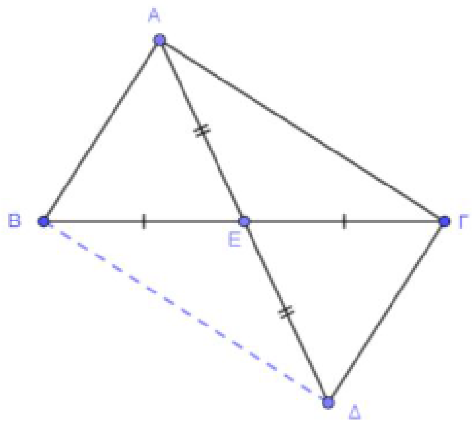
α) i. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΓΕ έχουν:

- ΕΒ = ΕΓ, από υπόθεση
- ΕΑ = ΕΔ, από υπόθεση,
- $A\hat{E}B = \Delta\hat{E}\Gamma$ ως κατακορυφήν.

Σύμφωνα με το κριτήριο Π – Γ – Π τα τρίγωνα είναι ίσα οπότε και οι πλευρές που βρίσκονται απέναντι από τις ίσες γωνίες $A\hat{E}B$ και $\Delta\hat{E}\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή ΑΒ = ΓΔ.



ii. Επειδή ΕΒ = ΕΓ και ΕΑ = ΕΔ, δηλαδή οι διαγώνιοι του ΑΒΔΓ διχοτομούνται, συμπεραίνουμε ότι το ΑΒΔΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε ΑΒ//ΓΔ. Άρα αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ προεκταθούν, αποκλείεται να συναντηθούν.



iii. Φέρουμε $BZ \perp A\Delta$ και $\Gamma H \perp A\Delta$. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΓΕΗ και ΒΕΖ έχουν:

- ΕΓ = ΕΒ, από υπόθεση
- $B\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}H$, ως κατακορυφήν

Άρα είναι ίσα οπότε ισχύει ΒΖ = ΓΗ, δηλαδή τα Β, Γ ισαπέχουν από την ΑΔ.